Задача 1.

Даны векторы **a** = {2; 12; 0}**,** **b** = {4.75; -4; 3.75}, **c** = {6; 6; 2}, и **d** = {12,75; 15; 5,75} в декартовой системе координат. Показать, что векторы **a, b**, **c**, образуют базис Найти координаты вектора **d** в этом базисе.

Решение. Так как каждый вектор задан тремя координатами, то в рассматриваемом векторном пространстве существует базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и размерность пространства, равная трем, совпадает с числом заданных векторов **a, b**, **c**. Поэтому векторы **a, b**, **c** образуют в нем базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство.

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \bar{0},$$

которое можно записать для соответствующих координат этих векторов

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 4{,}75\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0, \\ 12\lambda_1 - 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0, \\ 3{,}75\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4{,}75 & 6 & 0 \\ 12 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 3{,}75 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2{,}375 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3{,}75 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2{,}375 & 3 & 0 \\ 0 & -16{,}25 & -15 & 0 \\ 0 & 3{,}75 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2{,}375 & 3 & 0 \\ 0 & -16{,}25 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -23{,}75 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем единственное нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то есть векторы **a, b**, **c** являются линейно независимыми и, следовательно, образуют базис пространства. Найдем теперь разложение вектора **d** по базису **a, b**, **c** из условия выполнения векторного равенства

$$\mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c},$$

которое для соответствующих координат запишется

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 4{,}75\lambda_2 + 6\lambda_3 = 12{,}75, \\ 12\lambda_1 - 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 15, \\ 3{,}75\lambda_2 + 2\lambda_3 = 5{,}75. \end{cases}$$

Полученную квадратную систему линейных уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, α_3 решим по формулам Крамера. Вычислим определители 3–го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4,75 & 6 \\ 12 & -4 & 6 \\ 0 & 3,75 & 2 \end{vmatrix} = 95,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12,75 & 4,75 & 6 \\ 15 & -4 & 6 \\ 5,75 & 3,75 & 2 \end{vmatrix} = 108,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12,75 & 6 \\ 12 & 15 & 6 \\ 0 & 5,75 & 2 \end{vmatrix} = 99,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4,75 & 12,75 \\ 12 & -4 & 15 \\ 0 & 3,75 & 5,75 \end{vmatrix} = 87,5.$$

Тогда по формулам Крамера находим координаты вектора **d** в базисе **a,** **b**, **c**:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{108}{95}, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{99}{95}, \ \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{87,5}{95} = \frac{35}{38}.$$

В итоге имеем

$$\mathbf{d} = \frac{108}{95}\mathbf{a} + \frac{99}{95}\mathbf{b} + \frac{35}{38}\mathbf{c}.$$

Задача 50.

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^4 + 6x^2 + 5}{4x^4 - 5x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(-1 + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(4 - \frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^4}}{4 - \frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^4}} =$$

$$=\frac{-1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}}{4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}}=\frac{-1+0+0}{4+0+0}=-\frac{1}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что существует неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$2x^2-72=2(x^2-36)=2(x-6)(x+6),$$

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 6}\frac{2x^2-72}{x^2-7x+6}=\lim_{x\to 6}\frac{2(x-6)(x+6)}{(x-1)(x-6)}=2\lim_{x\to 6}\frac{x+6}{x-1}=2\frac{6+6}{6-1}=\frac{24}{5}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что существует неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{x+4}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+4}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+4-9)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-1-4)\cdot\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{4x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{4x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{4x\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}\cdot\frac{-1}{x+1}(2x-3)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-(2x-3)}{x+1}}=e^{-2}.$$

Задача 80.

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ для данных функций:

а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$.

$$\frac{dy}{dx}=\left(\left(x^2+1\right)^{1/2}+\left(x^3+1\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2}\cdot 2x+\frac{1}{3}\left(x^3+1\right)^{-2/3}\cdot 3x^2=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}.$$

б) $y=\arcsin\left(tg\frac{x}{2}\right)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}.$$

в) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}2e^{2x}\right)=\frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right).$$

г) $y=(\cos 3x)^x$.

$$\frac{dy}{dx}=\left(e^{\ln(\cos 3x)^x}\right)'=\left(e^{x\cdot\ln\cos 3x}\right)'=e^{\sin(\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left(x\cdot\ln\cos 3x\right)'=$$

$$=e^{\sin(\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left(\ln\cos 3x+x\frac{1}{\cos 3x}(-\sin 3x)3\right)=(\cos 3x)^x\cdot\left(\ln\cos 3x-\frac{3x\sin 3x}{\cos 3x}\right)=$$

$$=(\cos 3x)^x\cdot\left(\ln\cos 3x-3xtg3x\right).$$

Задача 90.

Для данных функций найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$: а) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$; б) $x = 2t^3 + t$; $y = \ln t$.

Решение.

а) $\frac{dy}{dx}=2xarctgx+\left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2xarctgx+1$;

$\frac{d^2y}{dx^2}=2arctgx+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

б) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1/t}{6t^2+1}=\frac{1}{6t^3+t}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{-1(6t^3+t)^{-2}\cdot(18t^2+1)}{6t^2+1}=-\frac{18t^2+1}{\left(6t^2+1\right)\left(6t^3+t\right)^2}=-\frac{18t^2+1}{t^2\left(6t^2+1\right)^3}.$$

Задача 110.

Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить пределы:

а) $$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{правило Лопиталя}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+x\cos x}{2\cos x-x\sin x}\right)=-\frac{0+0}{2-0}=0.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{3/x}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\ln\left(\cos 2x\right)^{3/x}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{3}{x}\ln\left(\cos 2x\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\ln\left(\cos 2x\right)\right)}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\ln(\cos 2x)\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{правило Лопиталя}}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{1}=-6\lim_{x\to 0}tg2x=-6\cdot 0$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x}=e^{0}=1.$$